رسالة لابن البناء المراكشي
في الاعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة

تحقيق : محمد سويسي

يندرج الفصل الذي نقدّم تحقيقه والتعليق عليه ضمن مجموعة اصطناعية من مخطوطات على ملكنا كلّها في مادة الرياضيات منها ما اختصّ بالهندسة ومنها ما كان خاصّا ببعض أبواب الحساب والجبر ، ومن بين الرسائل التي جاءت فيها ثلاث « للشيخ الفقيه القدوة أبي العباس الصالح الورع أبي عبد الله محمد بن عثمان الازدي الشهير بابن البنّاء » المرّاكشي : احداها رسالة في « الاشكال المساحية » حققتها وعلقت عليها وتشرفت بارسالها إلى كلية الاثار بجامعة القاهرة مساهمة منّي في احتفالها بعيدها الذهبي ؛ وثانيتها هذه الرسالة الخاصة بالاعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابّة وكنت قدمت ترجمتها إلى الفرنسية والانقليزية وتعليقاتي عليها للمؤتمر الدولي الخاصّ بتاريخ العلوم الرياضية الذي انعقد بكراتشي .(باكستان) في شهر جويلية الماضي 1975 (1) . وامّا باقي هذه الرسائل فهي الاتية :

— الايضاح على أصول المساح 35 ورقة

(1) طلب مني اثر ذلك الاستاذ **Boris Rosenfeld** من جامعة موسكو أن أوافيه بالنص العربي فأرسلت له نسخة من هذه الرسالة في 28 اكتوبر الفارط .

– التنبيه على المواضع من كتاب اقليدس التي أخذت منها المقدمات التي قدمت على الاعمال العددية في كتاب الجبر والمقابلة (لابن البناء)

– رسالة خاصة بالمثلثات المتشابهة تبتديء هكذا : فائدة كل مثلثين زواياه النظائر متساوية الخ ، 10 ورقات

– ارتفاع ما يمكن الوصول إليه أولا : 5 ورقات

– المثلث المجهول : 10 ورقات ونصف ، فيها نقص بآخرها (فيها استشهاد بشرح ابن هيدور لتخليص ابن البنّاء وفيها ذكر لبعض وحدات المساحة بالمغرب منها المرجع)

– التمهيد والتيسير في قواعد التكسير ، 8 ورقات ونصف

– في علم المساحة (منقول عن « اقدار الرائض على الفتق في الفرائض لبرهان الدين ابراهيم بن عمر السنويني (كذا) الطرابلسي الشافعي) 6 ورقات ونصف .

ورسالتنا هذه تشتمل على 5 ورقات ونصف كل منها فيه 17 سطرا من قطع 7،5 صم ، وكنا أشرنا إليها في ترجمتنا لابن البناء التي صدرنا بها تحقيقنا لكتابه « تلخيص أعمال الحساب » (2) .

على أننا لم نقف لها على ذكر في عامة المعاجم والفهارس والغالب على الظن – فيما وصل إليه علمنا اليوم – ان هذا مخطوط فريد ، وذاك ما يزيده قيمة ، خاصة وان قيمته العلمية جليلة اذ يعرض فيه صاحبه بعض اكتشافاته في باب مهمّ من أبواب نظرية العدد طالما شغل بال الباحثين ، وهو امتداد وتطبيق لباب الاعداد الأولية ، فنجد فيه خواصّ طريفة لبعض الاعداد في حدّ ذاتها أو لمجموعة من الاعداد باضافة بعضها إلى بعض .

ومن الناحية الشكلية انخطّ هذه الرسالة مغربي جميل في الجملة الا أن الناسخ كثيرا ما سها عن الاعجام حيث كان يجب أن يوضع أو وضعه في غير محلّه ، كما نجد الكثير من الاخطاء في اللغة والرسم ، وأشرنا أيضا إلى سقط تغيّر به المعنى العلمي فاصلحناه حسبما يقتضيه المنطق والعلم .

---

(2) منشورات الجامعة التونسية سنة 1970 .

رسالة ابن البناء في الاعداد التامة

(فصل) * وقد وعدنا في أول الكتاب (3) أن نلحق في آخره (4) ما يمكن من الابواب الاربعة التي اغفلها المصنّف وهي (باب) العدد التام والزائد (5) والناقص والاعداد المتحابة .

(الاول) العدد التام هو الذي تكون أجزاؤه مساوية (6) لجملته من غير زيادة ولا نقصان (ومثاله) ستة وكذلك أيضا ثمانية وعشرون إلى (7) غيرها من الامثلة .

وقانون (8) استخراجها أن ترتب أعدادا يكون الواحد أولها والذي يليه اثنين ثم تتبع ذلك ، كل عدد هو زوج زوج على (9) توالي أزواج الازواج هكذا (32.16.8.4.2.1) فاذا جمع الواحد إلى الاثنين كان المجتمع منهما ثلاثة[3] وهو عدد أول ، فاذا ضرب في آخر (10) مجموع وهو الاثنان كان الخارج ستة ، وهو عدد تام . فاذا اجتمع الواحد إلى (7) الاثنين إلى (7) الاربعة كان المجتمع سبعة ، وهو أول ، فاذا ضرب في آخر مجموع وهو الاربعة كان (11) الخارج ثمانية وعشرين [28] وهو عدد تام .

(*) ما بين قوسين جاء في الاصل المخطوط مكتوبا بالحبر الأحمر .
(3) لم يذكر اسم الكتاب ، وليس فيما سبق في المجموعة من الرسائل ما يمكن أن يهدي إليه .
(4) خ : ءاخره
(5) خ : الزايد
(6) خ : متساوية
(7) خ : إلي
(8) : قنون
(9) خ : علي
(10) خ : آخر
(11) خ : فكان

فصل وقد وعدنا في اول الكتاب ان نلحق

في اخره ما يمكن من الابواب الاربعة التي اغفلها المصنف

وهي باب العدد التام والزايد والناقص والاعداد

المتحابة الاول العدد التام هو الذي تكون اجزاؤه

متساوية لجملته من غير زيادة ولا نقصان ومثاله

ستة وكذلك ايضا ثمانية وعشرون الي غيرها من

الامثلة وقانون استخراجها ان ترتب اعدادا يكون

الواحد اولها والذي يليه اثنين ثم تتبع ذلك

كل عدد هو زوج زوج علي توالي ازواج الازواج هكذا

١ ٢ ٤ ٨ ١٦ فاذا جمع الواحد الي الاثنين كان

المجتمع منهما ثلاثة ٣ وهو عدد اول فاذا ضرب في اخر

مجموع وهو الاثنان كان الخارج ستة وهو عدد تام

فاذا جمع الواحد الي الاثنين الي الاربعة كان المجتمع

سبعة وهو اول فاذا ضرب في اخر مجموع وهو الاربعة

فكان الخارج ثمانية وعشرين ٢٨ وهو عدد تام

واذا جمع الواحد الي الاثنين الي الاربعة الي الثمانية

كان المجتمع خمسة عشر ١٥ فاذا ضربت في اخر

مجموع

مجموع وهو ثمانية كان الخارج مائة وعشرين ٠
١٢٠ وهو عدد تام الثاني العدد الزايد التي تكون ٠
اجزاؤه اكثر منه اذا جمعت ومثاله اثنا عشر ٠
وكذالك عشرون الي غير ذالك من الامثالة ٠
وقانون استخراج العدد الزايد ان تصنع اعداد ٠
زوج الزوج والواحد اولها علي ما تقدم هكذا ٠
١ ٢ ٤ ٨ ١٦ فاذا من الواحد الي ما اردت من
اعداد زوج الزوج علي التوالي واضرب اخرها ٠
في عدد اول اقل من المجموع المفروض في المسالة ٠
فان الخارج عدد زايد وقدر زيادته اعني زيادة
اجزائه علي مجموعة قد زادت جملته علي المضروب
فيه وبيانه انه اذا جمع من الواحد الي الاربعة
كان الجميع سبعة وفاذا اضرب الاربعة التي هو
اخر مجموع في المسئلة في ثلاثة فيخرج اثني
عشر وهو عدد زايد واذا جمع من الواحد الي الثمانية
وضرب الثمانية في عدد اول اقل من المجموع ٠
كان الخارج عددا زايدا فاذا اضرب في ثلاثة ٠

واذا جمع الواحد إلى (7) الاثنين إلى (7) الثمانية كان المجتمع خمسة عشر [15] فاذا ضربت في آخر (10) مجموع وهو ثمانية كان الخارج مائة وعشرين [120] وهو عدد غير تـام (12) .

(الثاني) العـدد الزائـد (13) الذي (14) تكون أجـزاؤه أكثر منـه اذا جمعت .

(ومثاله) اثنا عشر وكذلك (15) عشرون إلى (16) غير ذلك (15) مـن الامثلة (17) .

وقانون استخراج العدد الزائـد (13) أن تضع (18) أعداد زوج الزوج والواحد أولها على (19) ما تقدم هكذا (16.8.4.2.1) فاذا جمع (20) من الواحد إلى (7) ما أردت مـن أعـداد زوج الزوج عـلى (9) التـوالي وإذا ضـرب آخرها (22) في عدد أول أقل من المجموع المفروض في المسألة فان الخارج عدد زائد (13) وقدر زيادته أعني زيادة اجزائه على (9) مجموعه (23) قدر (24) ما زادت (25) جملته على (9) المضروب فيه .

---

(12) خطأ في خ : عدد تام وهذا مخالف للواقع 120 ليس عددا تاما
(13) خ : الزايـد
(14) خ : التـي
(15) خ : كذلك
(16) خ : إلى
(17) خ : الامثالـة
(18) خ : تصنع
(19) خ : علي
(20) خ : سقط جمـع
(21) خ : واضرب
(22) خ : واخرها
(23) خ : مجموعة
(24) خ : قـد
(25) خ : سقط ما

وبيانه أنه إذا جمع من الواحد إلى (7) الاربعة كان الجميع سبعة [7] فاذا ضرب الاربعة التي هي (26) آخر مجموع في المسألة في ثلاثة يخرج (27) اثنا عشر (28) وهو عدد زائد (13) .

وإذا جمع من الواحد إلى (7) الثمانية وضربت (29) ثمانية في عدد أول أقل من المجموع كان الخارج عددا زائدا (13) فاذا ضربت في ثلاثة خرج أربعة وعشرون وإذا ضربت في خمسة خرج أربعون و(29) اذا ضربت في سبعة خرج ستة وخمسون وكل واحد من هذه عدد زائد (13) واذا جمع من الواحد إلى ستة عشر كان المجتمع أحدا وثلاثين فاذا ضربت ستة عشر في ثلاثة خرج ثمانية وأربعون وإذا ضربت في خمسة خرج ثمانون وإذا ضربت في احدى عشر كان الخارج ستة وسبعين ومائة و(31) اذا ضربت في ثلاثة عشر كان الخارج ثمانية ومائتين (32) وكل واحد من هذه الاعداد عدد زائد (33) وقدر زيادته أعني زيادة (34) أجزائه على جملته قدر زيادة المجموع على المضروب فيه (35) .

(الثالث) العدد الناقص هو الذي تكون أجزاؤه أقلّ منه (ومثاله) أربعة وكذلك ثمانية وكذلك ستة عشر وكذلك كل عدد هو زوج زوج ، الا أن

---

(26) خ : هو

(27) خ : فيخرج

(28) خ : اثنى

(29) خ : ضرب

(30) خ : فاذا

(31) خ : سقط و

(32) خ : مائتان

(33) خ : زايد

(34) خ : زيادته

(35) خ : الاضروب

زوج الزوج لا يكون نقصانه عن جملته أعني نقصان أجزائه ، الا واحد خاصة ، وغيرها من الناقص يختلف .

وقانون (36) استخراجها أن تضع اعداد زوج الزوج المبداة (37) من الواحد هكذا (16.8.4.2.1) ثم تبدأ بالجمع من الواحد إلى ما أردت ونضرب آخر (38) المجموع في عدد أول أكثر من المجموع فما خرج فهو عدد ناقص.

(2) بيانه اذا جمع من الواحد إلى (7) الاربعة كان المجموع سبعة فاذا ضربت الاربعة في عدد أول أكثر من السبعة مثل احد عشر يكون الخارج أربعة وأربعين وهو عدد ناقص . واذا ضربت في ثلاثة عشر كان الخارج اثنين وخمسين وهو عدد ناقص ، واذا ضربت في سبعة عشر كان الخارج ثمانية وستين وهو عدد ناقص . واذا جمع من الواحد إلى (7) ثمانية وضربت الثمانية في عدد أول أكثر من خمسة عشر التي هي المجموع مثل سبعة عشر يكون الخارج ستة وثلاثين ومائة وهو عدد ناقص ، وكذلك غير هذا مما (3) بعده فتأمله .

(الرابع) الاعداد المتحابة وهما عددان أحدهما زائد (33) والاخر ناقص ويكون قدر زيادة أجزاء الزائد (33) على (9) نفسه كقدر نقصان أجزاء الناقص عن نفسه ، فاذا جمعت أجزاء الزائد اجتمع منها مثل الناقص واذا جمعت (39) أجزاء الناقص اجتمع منها مثل الزائد (33) ، فاذا كانا بهذه المثابة فهما متحابان (ومثاله) مائتان وعشرون (220) والثاني أربعة وثمانون ومائتان [284] فالاول زائد (33) والثاني ناقص وزيادة أجزاء الاول على (9) جملته أربعة وستون وبها يكون مثل الثاني ، وهذا القدر بعينه هو نقصان الثاني عن الاول والله أعلم .

---

(36) خ : قنون
(37) خ : مبدات
(38) خ : آخر
(39) خ : اجتمعت

وقانون استخراجها بأن تضع أعداد زوج الزوج المبتدأة من الواحد هكذا (8.4.2.1) ثم تجمع ما قبل آخرها وتحفظه وهو سبعة (7) وتزيد عليها آخر المجموعة وهو أربعة [4] يكون الجميع احدى (40) عشر (11) ، ثم تنقص من المجموع الذي هو سبعة [7] العدد الذي قبل آخر ما جمعت وهو اثنان [2] يبقى (41) خمسة (5) فيحصل عددان أحدهما خمسة (5) والاخر احدى(40)عشر (11) فتضرب احدهما في الاخر يخرج خمسة وخمسون [55] فاذا ضربت في آخر المجموعة وهو أربعة [4] كان الخارج عشرين ومائتين وهو أحد العددين المتحابين وهو الزائد (42) ، ثم تأخذ ما (43) بعد آخر مجموع يليه وهو في هذه المسألة ثمانية (8) وتأخذ الرابع منه على (44) العكس وهو واحد فتجمعهما يكون الجميع تسعة [9] فتضربه في ثمانية [8] يخرج اثنان وسبعون [72] فتسقط منها واحدا أبدا يبقى (5) [71] وهو عدد أول فتضرب في آخر مجموع وهو أربعة وثمانون ومائتان [284] وهو العدد الثاني من الاعداد المتحابة ، وهو الناقص، فعدد (45) [220] وعدد [284] عددان متحابان .

ولا يكون استخراج عددين متحابين أقل من هذين فانهما أقل الاعداد المتحابة .

ومتى (46) لم يكن كل واحد من العددين المضروبين في آخر المجموع أولا لم يخرج منهما للاعداد المتحابة .

---

(40) خ : اجدى
(41) خ : يبقى
(42) خ : الزايد
(43) خ : لما
(44) خ : علي
(45) خ : بعدد
(46) خ : متي

ومتى (46) أردت استخراج الاعداد المتحابة التي تتلو (47) هذه رتبت أعداد زوج الزوج مبتدأة من (48) الواحد هكذا (32.16.8.4.2.1) ثم (49) تجمع ما قبل آخرها فيكون أحدا وثلاثين [31] فتزيد عليه آخر المجموعة يكون سبعة وأربعون [47] ثم (50) تنقص من المجموع أولا العدد الذي قبل المزيد وهو ثمانية (8) يبقى (51) ثلاثة وعشرون [23] وهذان العددان اللذان أحدهما [23] ، والاخر [47] كل واحد منهما عدد أول ، فتضرب أحدهما في الاخر يكون (52) الخارج [1081] فتضرب ذلك (53) في آخر المجموعة وهو (16) يخرج [96 172] وهو أحد العددين المتحابين وهو الزائد (54) ، ثم تأخذ العدد الذي بعد آخر المجموعة وهو (32) فتجمعه مع الرابع قبله يكون (36) فتضربها في هذا المأخوذ الذي هو (32) يخرج [1152] فتسقط منها واحدا أبدا يبقى (51) [1151] وهو عدد أول فتضربه في آخر المجموعة الذي هو (16) يكون الخارج [18416] وهو العدد الثاني من الاعداد المتحابة وهو الناقص فعدد [17296] وعدد [18416] عددان متحابان أحدهما زائد (54) والآخر ناقص ، والله أعلم .

(قلت) تقدم أن شرط المضروب في ا خر المجموعة أن يكون أوّل (55) أي أصم ، فالذي يذكر ذلك هو الامام الفاضل السيد أبو عبد الله الشريف المراكشي (56) رحمه الله ورضي الله عنه ، وهو مع ما (57) قبله من العمل

(47) خ : تتلــوا
(48) خ : الي
(49) خ : لم تقل وهذا لا معنى له
(50) خ : كم ، وهو خطـأ
(51) خ : يبقى
(52) خ : يكــن
(53) خ : ذالك
(54) خ : الزايد
(55) خ : اولا
(56) خ : المركشي
(57) خ : سقط ما

المتناقص لانه ضرب خمسة وخمسين في أربعة ليخرج (58) أحد المتحابين في المثال الاول ، فتأمله ، فانه مشكل ، والله أعلم .

(وتبين) من مجموع ما ذكرناه في هذا الفصل انه اذا اجتمعت أعداد زوج الزوج مبتدأة من الواحد ، وهو معها ، فأما أن يضرب المجموع في اخر المجموعة ، أو في غيره ، وأما أن يكون المضروب فيه عددا أول (5) أو غير أول ، فان لم يكن أول (55) لم ينتج ، وان كان أول (55) فان كان أقل من مجموع جملة الاعداد المفروضة وضربت فيه آخرها فان الخارج عدد زائد (59) ومبلغ زيادة أجزائه على جملته قدر زيادة المجموع على (60) المضروب فيه ، وان ضربت آخر الاعداد المفروضة في عدد أول أكثر من مجموعها فان الخارج عدد ناقص ومبلغ نقصان أجزائه عن جملته قدر نقصان المجموع عن المضروب فيه ، وان ضرب المجموع مزيدا عليه الآخر في المجموع عن المضروب فيه ، وان ضرب المجموع مزيدا عليه الاخر في المجموع منقوصا منه ما قبل الاخر ، وضرب الخارج في الاخر خرج أحد المتحابين وهو الزائد (59) ، وان ضرب ما بعد آخر المجموعة مضاف إليه رابعة المعكوس في نفسه من غير اضافة وأسقط من الخارج واحد ، ثم ضرب الباقي في آخر المجموعة خرج العدد الثاني من الاعداد المتحابة ، وهو العدد الناقص .

وقد أتينا على (60) ما شرطناه على (60) سبيل الاختصار ، ولو شرطنا القول في هذا الفن بكثرة التقاسيم (61) وكثرة الامثلة (62) لخرجنا عن الفائدة إلى (63) الاطالة ، وفيما ذكرناه ارشاد لمن تأمله وفهم معناه ، والله تعالى (64)

---

(58) خ : يخـــرج
(59) خ : زايـــد
(60) خ : عـــلي
(61) خ : التقاسيم
(62) خ : الامثالـــة
(63) خ : إلى
(64) خ : تعـــالي

المسؤول أن يجعلــه خالصا لوجهــه بمنـه وكرمه وينفعنــا بالعلم (65) والعمل بـه .

وليكن (66) هذا اخر الكتاب والله الموفق للصواب وهو حسبنا ونعم الوكيل ولا حول ولا قوة الا بالله العلي العظيم وصلى الله على سيدنا محمد وا له عدد خلقه ورضى نفسه وزنة عرشه ومداد كلمته .

---

(65) خ : بالعلــوم
(66) خ : وليكــون

التعاليــق

أ ــ الاعـداد التامـة

نذكر انه إذا كانت متوالية هندسية أوّل عدد فيها أ و أساسها ر فمجموع ن الاعداد الاولى منها يساوي :

$$أ + أر + أر^{2} + ... + أر^{ن-1} = أ \frac{ر^{ن} - 1}{ر - 1}$$

وفي الصورة الخاصة أ = 1 ، ر = 2 يكون هذا المجموع

$$2^{ن} - 1$$

هذا وإن بعض الاعداد التي يكون شكلها $2^{ن} - 1$ أعداد أولية وسميت في القرن السادس عشر للميلاد اعداد مرسان

ويشير ابن البناء منذ القرن الثالث عشر إلى البعض منها ضمن نصّه لقانون إيجاد الاعداد التّامة ، وهما العددان $2^{2} - 1 = 3$ و $2^{3} - 1 = 7$. وحتى الان نحن لا نعلم هل ان سلسلة اعداد مرسان متناهية أم لا . ويلوح أن ابن البناء يشترط في قانونه لايجاد الاعداد التامة أن يكون المجموع $2^{ن} - 1$ عددا أوليا : وهو يستعمل لذلك قياس الخلف فيستشهد بمثال $2^{4} - 1 = 15$ فيوجد منه العدد 120 وهو غير تام

أولى الاعداد التامة التي يتعرض إليها ابن البناء

ن = 2 $2^{2} - 1 = 3$ عدد أول ← $2\ (2^{2} - 1) = 6$ عدد تام

ن = 3 $2^{3} - 1 = 7$ عدد أول ← $2^{2}\ (2^{3} - 1) = 28$ عدد تام

ن = 4 $2^{4} - 1 = 15$ غير أول ← $2^{3}\ (2^{4} - 1) = 120$ غير تام

ن = 5 $2^{5} - 1 = 31$ عدد أول ← $2^{4}\ (2^{5} - 1) = 496$ عدد تام الخ

أي ان ابن البناء يأتي بما يؤيد المقالة 36 من الكتاب التاسع من أصول أقليدس .

إذا كان $2^{ن}-1$ عددا أوليا إذن $2^{ن-1}(2^{ن}-1)$ عدد تام ويقيم فيما بعد اولار Euler الدليل على صحة هذه المقالة فيما يخص الاعداد التامة الزوجية.

فهل هناك عدد تام فردي ؟ هذا من الصعوبة بمكان فرأى سلفستار Sylvester وقد اهتم به حوالي 1888 انه بمثابة مشكل تربيع الدائرة قبل ما قام به هرميت Hermite ولندمان Lindemann من اعمال لاثبات استحالته. وعلى كل فالمشكل ما زال معروضا على الحلّ والمجال فيه مفتوح (*).

ب ـ الأعداد الزائدة

سائر الأمثلة التي استشهد بها ابن البناء اعداد زوجية وذلك أنها هي الاولى ، فأوّل عدد زائد فردي هو 10665

شرح أمثلة ابن البناء

هب المتوالية 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16 ، 32

أي 1 ، 2 ، 2^2 ، 2^3 ....$2^{ن}$

وهب المجموع : $2^{(ن+1)}-1$ ، والعدد الاوليّ ك ن أصغر من $2^{ن+1}-1$ اذن الجذاء 2ن كن عدد زائد

1 ـ مجموع $2^{ن} = 2^3 - 1$

$= 7$

الاعداد الاولية التي هي أصغر من 7 هي : 3و5

$\leftarrow 3 \times 4 = 12$

أجزاء 12 هي : 6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1

مجموعها : 16

(*) انظر Jean Itard : Arithmétique et théorie des nombres ، النشرات الجامعية بفرنسا 1963 ص 34

الفرق (16 — 12) = 4 = الفرق (7 — 3)

← 4 × 5 = 20

أجزاء 20 : 10 ، 5 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 22

الفرق (22 — 20) = 2 = الفرق (7 — 5)

2) اذا ن = 3 مجموع $2^{ن}$ = 2^4 — 1

= 15

الاعداد الاولية التي هي أصغر من 15 هي : 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13

← 8 × 3 = 24

أجزاء 24 هي : 12 ، 8 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1

مجموعها : 36

الفرق (36 — 24) = 12 = الفرق (15 — 3)

← 8 × 5 = 40

اجزاء 40 هي : 20 ، 10 ، 8 ، 5 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 50

الفرق (50 — 40) = 10 = الفرق (15 — 5)

← 8 × 7 = 56

أجزاء 56 : 28 ، 14 ، 8 ، 7 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 64

الفرق (64 — 56) = 8 = الفرق (15 — 7) الخ

ج — الاعداد النّاقصة

قانون ايجادها : هب المتوالية 1 ، 2 ، 2^2 ... $2^{ن}$ ...

مجموع حدودها حتى رتبة ن = $2^{(ن+1)}$ — 1

فاذا كان العدد الاولي لكن أكبر من $2^{\text{ن}+1} - 1$ فالجذاء $2^{\text{ن}} + \text{ك}$ عدد ناقص مثال اذا ن = 2 $2^3 - 1 = 7$

← 11 مثلا عدد أولي أكبر من 7

إذن $2^2 + 11 = 44$ عدد ناقص

أجــزاء 44 : 22 ، 11 ، 4 ، 2 ، 1

مجمـوعهـا : 40

الفرق (44 ـ 40) = 4 = الفرق (11 ـ 7) الخ

د ـ الاعداد المتحابّة

يذكر ابن البناء الزوج الاول من الاعداد المتحابة :

الزائد 220

والناقص 284

أجـزاء 220 : 110 ، 55 ، 44 ، 22 ، 20 ، 11 ، 10 ، 5 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعهـا : 284

أجـز اء 284 : 142 ، 71 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعهـا : 220

قانون ابن البناء لايجادها : هب المتوالية 1 ، 2 ، 2^2 ....، $2^{\text{ن}}$...

اجمع الحدود حتى رتبة ن : $2^{\text{ن}} - 1$

أضف إليها الحدّ الاخير : $2^{\text{ن}} + 2^{\text{ن}-1} - 1$

اطرح من مجموع الحدود الحدّ قبل الاخير $2^{\text{ن}} - 2^{\text{ن}-2} - 1$

سطّح النتيجتين تجد $\text{أ} = 9 \times 2^{2\text{ن}-3} - 9\ 2^{\text{ن}-2} + 1$

إذن أ × $2^{\text{ن}-1}$ عدد زائد وهو العنصر الاوّل من زوج الاعداد المتحابة .

2 — اعتبر الحدّ الموالي $2^{ن}$ والرابع قبل الاخير $2^{ن-3}$

مجموعهما = $2^{ن} \times 9 \times 2^{ن-3}$

سطحه في $2^{ن} = 9 \times 2^{2ن-3}$

يطرح منه 1 دائما فيكون $9 \times 2^{2ن-3} - 1$ عددا أوليا

سطّحه في $2^{ن-1}$ تجد : $9 \times 2^{3ن-4} - 2^{ن-1}$

وهو العنصر الثاني أي العدد الناقص من زوج الاعداد المتحابة

— وهنا نلاحظ أنّ لثابت بن قرة الحرّاني قانونا بسيطا لايجاد الاعداد المتحابّة هذه خلاصته :

هب ثلاثة الاعداد الاولية المخالفة للعدد 2 :

أ — $3 \times 2^{ن} - 1$

ب — $3 \times 2^{ن-1} - 1$

ج — $9 \times 2^{ن-1} - 1$

إذن يكوّن الزوج $2^{ن}$ أ ب و$2^{ن-1}$ ج عددين متحابّين وكان فرما Fermat يعرف هذا القانون حوالي سنة 1636م فمكنه من ايجاد زوج الاعداد المتحابّة اذا كان ن = 4 أي العددين 17296 و18416 الذين سبق لابن البنّاء أن أشار إليهما

— كما نلاحظ أنّ ديكارت Descartes حوالي سنة 1638 استخدم قانون ثابت عينه لايجاد الزوج 9.437.056 و9.363.584

وأوجد أولار Euler فيما بعد 64 زوجا من الاعداد المتحابّة .